МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В Г. ВОЛГОДОНСКЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

(Институт технологий (филиал) ДГТУ в г. Волгодонске)

Кафедра «Технический сервис и информационные технологии»

Математика

Методические рекомендации к самостоятельной работе
студентов заочной формы обучения
направления подготовки
43.03.01 Сервис

г. Волгодонск
2023

Автор:
доцент кафедры СКС и ГД, к. т. наук Л.В. Благина

Методические рекомендации составлены с учётом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования подготовки бакалавров. В помощь студентам предлагаются вопросы к экзамену, темы докладов для устного опроса, практические задания, методические рекомендации к практическим занятиям, основная и дополнительная литература.

Содержание

Введение

Целями освоения дисциплины «Математика» является теоретическое и практическое изучение обучающимися основных понятий и методов линейной алгебры и математического анализа и теории вероятностей. Освоение инструментария и математических методов для решения задач, возникающих в профессиональной сфере деятельности, обеспечение научной базы, необходимой для естественнонаучной и профессиональной подготовки будущих бакалавров, способных выполнять все виды профессиональной деятельности, предусмотренные для данного направления, формирование математической составляющей общекультурных и профессиональных компетенций.

Задачи
-воспитание культуры современного математического мышления;
-изучение математического аппарата, методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, применяемых для решения практических задач;
-развитие логического и алгоритмического мышления;
-формирование представления о роли математики как мощного средства решения задач в практической деятельности;
-привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования для решения прикладных задач в профессиональной сфере;
-выработка навыков и умений самостоятельного расширения и углубления математических знаний и проведение математического анализа задач в профессиональной сфере.

Методические рекомендации по подготовке доклада к устному опросу

Доклад является формой самостоятельной работы студента, доклад должен быть выполнен в печатном виде и представлен на практическом занятии в соответствии с заявленной темой. Доклад готовится по сформированному преподавателем перечню тем для устного опроса в рамках самостоятельного изучения дисциплины. Работа должна быть написана понятным языком и технически правильно оформлена.

Общие требования к оформлению доклада:

- бумага формата А4;
- текст набирается в редакторе Word;
- шрифт текста – Times New Roman, размер 14;
- размер полей: слева – 3 см, справа – 1,5 см, снизу и сверху – по 2 см;
- междустрочный интервал – полуторный;
- отступ первой строки абзаца – 1,25 см;
- нумерация страниц сквозная. Титульный лист является первой страницей (номер не ставится). Номера последующих страниц проставляются в нижнем правом углу;
- каждый раздел рекомендуется начинать с новой страницы.

Приводимые в тексте цитаты должны быть точными и иметь ссылку на первоисточник (см. ниже требования к цитированию).

При неудовлетворительном выполнении доклада (тема не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы), он возвращается студенту на доработку с учетом замечаний преподавателя.

При подготовке доклада формируются навыки работы с литературой, её цитирования и правильного оформления работы. Такие навыки необходимы и при подготовке курсовой работы, выпускной квалификационной работы.

Общие требования к цитированию

Текст цитаты заключается в кавычки и приводится в той грамматической форме, в какой он дан в источнике, с сохранением особенностей авторского написания.

При цитировании каждая цитата должна сопровождаться ссылкой на источник. Ссылки на литературу в тексте работы приводятся в квадратных скобках - [23, с. 95]. При одновременной ссылке на несколько литературных источников они перечисляются через точку с запятой, с сохранением порядка следования в общем перечне литературы, например [6; 10; 12].

Примеры библиографического описания литературы

Если книга имеет *одного автора:*

Ясницкая, В. Р. Социальное воспитание в классе : теория и методика : учеб. пособие / В. Р. Ясницкая ; под ред. А. В. Мудрика. – М. : Академия, 2004. – 352 с.

Если книга имеет двух авторов, то в начале описания указывается первый автор, после заглавия указываются сведения и о первом, и о втором авторах:

Деркач, А. А. Акмеология : учеб. пособие / А.А. Деркач, В. Г. Зазыкин. – СПб. : Питер, 2003. – 256 с.

Если книга имеет трёх авторов, то в начало описания выносится первый автор, остальные авторы, вместе с первым, перечисляются после заглавия:

Куницына, В.Н. Межличностное общение: учебник / В.Н.Куницына, Н.В. Казаринова, В.М. Погольша. – СПб.: Питер, 2001. – 544 с.

Если книга имеет *четыре и более авторов,* то после заглавия указываются только первый автор, далее следуют слова «и др.», заключенные в квадратные скобки:

Педагогика : учеб. пособие / В. А. Сластёнин [и др.]. – 3-е изд. – М. : Школа-Пресс, 2000. – 512 с.

Если книга является частью многотомного издания, то указывается количество томов (или книг), и ссылка делается на тот том, который использован в работе. Например:

Немов, Р. С. Психология : в 3 кн. Кн. 3 : Психодиагностика. Введение в научное психологическое исследование с элементами математической статистики / Р. С. Немов. – 4-е изд. – М. : ВЛАДОС, 2001. – 640 с.

Пример описания главы из книги

Хьелл, Л. Исследование и оценка в психологии личности / Л. Хьелл, Д. Зиглер // Теория личности / Л. Хьелл, Д. Зиглер ; пер. С. Меленевская, Д. Викторова. – СПб. : Питер, 2001. – Гл. 2. – С. 56-104.

В случае *тематического сборника трудов* описание источника начинается с заглавия, далее после косой черты указывается редактор (или редакторы), далее описание сведений об издании, выходные данные как в предыдущих случаях. Например:

Психологическая наука в России XX столетия: проблемы теории и истории / под ред. А.В. Брушлинского. – М.: Издательство «Институт психологии РАН», 1997. – 320 с.

Если *заглавие книги состоит из нескольких предложений*, между которыми в источнике информации отсутствуют знаки препинания, то в описании эти предложения отделяют друг от друга точкой:

Кроник, А. А. Каузометрия. Методы самопознания, психодиагностики и психотерапии в психологии жизненного пути / А. А. Кроник, Р. А. Ахмеров. - М. : Смысл, 2003. – 284 с.

Иногда книга имеет второе, уточняющее название. Оно также приводится в описании и обычно отделяется от основного двоеточием и пишется с маленькой буквы. Например:

Первин, Л. Психология личности : теория и исследования / Л. Первин, О. Джон ; пер. с англ. М. С. Жамкочьян ; под ред. В. С. Магуна. – М. : Аспект Пресс, 2001. – 607 с.

Фельдштейн, Д. И. Психология взросления : структурно-содержательные характеристики процесса развития личности : избранные труды / Д. И. Фельдштейн. – 2-е изд. – М. : Флинта, 2004. – 672 с.

Сведения, относящиеся к заглавию, содержащую информацию, раскрывающую и поясняющую основное заглавие, сведения о виде, жанре, назначении произведения, указывают через двоеточие с маленькой буквы:

Стефаненко, Т. Г. Этнопсихология : учебник…

Авторефераты диссертаций и диссертации в списке литературы приводятся следующим образом:

Жалагина, Т. А. Психологическая профилактика профессиональной деформации личности преподавателя вуза : дис. ... д-ра психол. наук. – Тверь, 2004. – 309 с.

Савченко, Н. А. Смысловые установки как компонент профессиональных диспозиций студентов-психологов : автореф. дис. … канд. психол. наук / Н. А. Савченко. – Ростов-н/Д., 2008. – 16 с.

Пример описания *справочных материалов:*

Справочник практического психолога : Психотерапия / сост. С.Л. Соловьёва. – М. : АСТ ; СПб : Сова, 2011. – 575 с.

Описание *статей* осуществляется следующим образом:

статья одного автора из сборника:

Гаврилова, Г.Г. Проблемы инвестирования в негосударственные пенсионные фонды / Г.Г. Гаврилова // Стратегия и тактика управления предприятием в переходной экономике : меэвуз. сб. науч. тр. / ВолгГТУ ; под ред. Г.С. Мерзликиной. – Волгоград, 2006. – Вып. 13 – С. 273-279.

статья двух авторов из сборника:

Ермоленко, И. И. Проблемы внедрения принципов стратегического планирования на предприятиях в современном управлении / И. И. Ермоленко, Р. Е. Шульман // X Региональная конференция молодых исследователей Волгоградской области, 8-11 нояб. 2005 г. / ВолГУ [и др.]. – Волгоград, 2006. – Вып. 1. Экономика и финансы : тезисы докл. – С. 218-219.

статья трёх авторов из сборника:

Кравцов, М. Ю. Социологический аспект проблемы порядка в современных междисциплинарных исследованиях / М. Ю Кравцов, А. В. Соловьёва, Р. В. Ященко // Актуальные проблемы истории, теории и технологии социальной работы : сб. науч. ст. / ФГОУ ВПО «Новочеркасская гос. мелиорат. академ.». – Новочеркасск ; Ростов н / Д., 2007. – Вып. 9. – С. 114-118.

статья четырёх и более авторов из сборника:

Особенности заболеваний и травм у спортсменов / Л.М. Демьянова [и др.] // Здоровая молодежь – будущее страны! : матер. гор. межвуз. науч.-практ. Конф., г. Волгодонск, 28 апр. 2011 г. / Волгодонский институт (филиала) ЮФУ. - Волгодонск, 2012. – С. 83-88.

статья одного автора из журнала:

Кашкаров, А. П. Проблемы семейного чтения / А. П. Кашкаров // Воспитание школьников. -2012. - № 9. – С. 30-34.

статья двух авторов из журнала:

Николаев, В. А. Сущность трудового воспитания в современных условиях / В. А. Николаев, В. А. Шошин // Педагогика. – 2011. - № 6. – С. 51-57.

статья трёх авторов из журнала:

Ромашкин, К. И. Математика в проектах наукоучения / К. И. Ромашкин, Г. Н. Аверьянова, А. С. Пронин // Социально-гуманитарные знания. – 2012. - № 3. – С. 135-144.

статья более трёх авторов из журнала:

Конфессиональные особенности религиозной веры и представлений о ее социальных функциях / Ю. А. Гаврилов [и др.] // Социологический исследвоания. – 2005. - № 6. – С. 46-56.

статья из газеты:

Головачёв, В. Долг платежом красен: о долгах по зарплате работникам бюджетной сферы / В. Головачёв // Труд. – 2006. – 3 апр. – С. 2.

Примеры описания ресурса удаленного доступа:

Электронный каталог ГПНТБ России [Электронный ресурс] : база данных содержит сведения о всех видах лит., поступающей в фонд ГПНТБ России. – Электрон. дан. (6 файлов, 511 тыс. записей). – М., [2009]. – Режим доступа : http://www.gpntb.ru/win/search/help/el-cat.html

Образование: исследовано в мире = oim.ru [Электронный ресурс] : междунар. науч. пед. интернет-журнал с библиотекой-дипозитарием / под патронажем Рос. Акад. Образования; Гос. науч. пед. б-ки им. К.Д. Ушинского. – М. : OIM.RU, 2001. – Режим доступа : http://www.oim.ru.

Лосев, С. Корпоративные системы ЭЦП : между производством и технологией [Электронный ресурс] / С. Лосев. – 2006. – Режим доступа : http://www.imag.ru/ID=622563

Акопова, Ж. История возникновения и правового регулирования товарных знаков [Электронный ресурс] // Право и управление. XXI век. – 2008. – № 4. – Режим доступа: http://elibrary.ru/item.asp?id=16922586

Если в работе цитируются несколько статей из сборника трудов или журнала, единицами библиографического описания являются каждая из этих статей, а не весь сборник или журнал.

Темы докладов для устного опроса

1. Понятие матрицы, типы матриц
2. Операции с матрицами (сложение, умножение на число, умножение матрицы на матрицу, транспортирование матриц). Свойства операций.
3. Определители матриц, их свойства.
4. Разложение определителя по элементам любой строки, столбца.
5. Обратная матрица. Критерий ее существования и формула для вычисления.
6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
7. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛАУ.
8. Формулы Крамера для решения СЛАУ.
9. Матричный метод решения СЛАУ.
10. Минор матрицы, ранг матрицы.
11. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы и их ранги.
12. Линейно зависимые, линейно независимые строки матрицы. Критерий линейной зависимости.
13. Критерий совместности СЛАУ Кронекера-Капелли.
14. Метод Жордано-Гаусса решения СЛАУ. Базисный минор, базисные и свободные переменные СЛАУ.
15. Решение однородных систем линейных уравнений (ОСЛАУ).
16. Критерий существования нетривиальных решений ОСЛАУ.
17. Фундаментальная система решений ОСЛАУ, общее решение.
18. Понятие n-мерного вектора, операции с векторами.
19. Линейное арифметическое векторное пространство.
20. Линейно зависимая и независимая система векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.

Вопросы к экзамену по дисциплине

1. Понятие матрицы, типы матриц
2. Операции с матрицами (сложение, умножение на число, умножение матрицы на матрицу, транспортирование матриц). Свойства операций.
3. Определители матриц, их свойства.
4. Разложение определителя по элементам любой строки, столбца.
5. Обратная матрица. Критерий ее существования и формула для вычисления.
6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
7. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛАУ.
8. Формулы Крамера для решения СЛАУ.
9. Матричный метод решения СЛАУ.
10. Минор матрицы, ранг матрицы.
11. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы и их ранги.
12. Линейно зависимые, линейно независимые строки матрицы. Критерий линейной зависимости.
13. Критерий совместности СЛАУ Кронекера-Капелли.
14. Метод Жордано-Гаусса решения СЛАУ. Базисный минор, базисные и свободные переменные СЛАУ.
15. Решение однородных систем линейных уравнений (ОСЛАУ).
16. Критерий существования нетривиальных решений ОСЛАУ.
17. Фундаментальная система решений ОСЛАУ, общее решение.
18. Понятие n-мерного вектора, операции с векторами.
19. Линейное арифметическое векторное пространство.
20. Линейно зависимая и независимая система векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.
21. Существование в Rn системы n линейно независимых векторов. Базис в Rn.

22. Линейная зависимость в Rn любой системы из m векторов (m>n).
23. Критерий базиса в Rn. Разложение вектора по базису и его единственность.
24. Скалярное произведение в Rn, его свойства. Экономический и механический смысл скалярного произведения.
25. n-мерное евклидово пространство, модуль вектора, направление косинусы вектора.
26. Проекция вектора на вектор, ортогональные, коллинеарные, компланарные векторы.
27. Вектор как направленный отрезок. Декартов прямоугольный базис и декартова прямоугольная система координат (д.п.с.к.).
28. Радиус-вектор точки, координаты точки в д.п.с.к.
29. . Векторное произведение векторов в E3, его свойства, механический смысл.
30. Смешанное произведение векторов в E3, его свойства.
31. Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов в E3.
32. Понятие уравнения геометрического образа.
33. Плоскость, нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.
34. Угол между плоскостями, условие перпендикулярности и параллельности плоскостей, расстояние от точки до плоскости. Плоскость в En, n>3.
35. Прямая в E3, ее направляющий вектор. Общие, канонические, параметрические уравнения прямой. Луч и отрезок.
36. Угол между прямыми в E3. Перпендикулярные, параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Расстояние от точки до прямой в E3. Прямая, луч и отрезок в En, n>3.
37. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости, принадлежность прямой плоскости.
38. Прямая на плоскости, как частный случай прямой в E3 и как линия пересечения плоскости с плоскостью OXY.
39. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.
40. Уравнение кривой второго порядка, его преобразование с помощью поворота и параллельного переноса осей координат.
41. Эллипс, гипербола, парабола. Оси симметрии, центр, вершины, эксцентриситет. Канонические уравнения и уравнения со смещенным центром.
42. Множество, операции с множествами.
43. Функция одной переменной, способы задания. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция.
44. Предел функции при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).
45. Бесконечно малая функция и ее свойства.
46. Бесконечно большая функция, связь с бесконечно малой.
47. Основные теоремы о пределах функции (критерий существования предела, единственность, предел суммы, произведения, частного).
48. Первый и второй специальные пределы.
49. Сравнение бесконечно малых функций.
50. Односторонние пределы функции.
51. Непрерывность функции в точке, на интервале, отрезке. Точки разрыва и их классификация.
52. Основные теоремы о непрерывных функциях (непрерывность основных элементарных функций, сложной функции).
53. Свойства функций непрерывных на замкнутом отрезке, абсолютный экстремум функции.
54. Приращение аргумента и приращение функции. Задача о касательной к плоской кривой.

55. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.
56. Темп роста и эластичность функции.
57. Необходимое условие дифференцируемости функции.
58. Основные правила и формулы дифференцирования.
59. Дифференциал функции, его геометрический смысл, свойства, применение к приближенным вычислениям.
60. Производные и дифференциалы высших порядков.
61. Первообразная. Теорема о первообразной. НИ, его геометрический смысл.
62. Свойства НИ.
63. Теорема о замене переменной в НИ.
64. Таблица основных интегралов.
65. Интегрирование по частям в НИ.
66. Рациональные дроби, правильные и неправильные дроби. Интегрирование неправильных дробей (теорема).
67. Простейшие рациональные дроби, их интегрирование. Теорема о разложении правильной дроби на сумму простейших дробей.
68. Интегрирование тригонометрических функций.
69. Интегрирование простейших иррациональностей.
70. Тригонометрические подстановки.
71. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.
72. ОИ как предел интегральных сумм. Геометрический смысл ОИ. Теорема существования ОИ.
73. Свойства ОИ, теорема о среднем.
74. Теорема о производной от интеграла с переменным верхним пределом.
75. Формула Ньютона-Лейбница (теорема).
76. Замена переменной и интегрирование по частям в ОИ.
77. Теоремы о площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными а) в декартовой системе координат; б) параметрически.
78. Длина дуги плоской кривой. Теорема о длине дуги в декартовой системе координат и ее следствия.
79. Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений (теорема). Объем тела вращения.
80. Экономические приложения ОИ.
81. Несобственные интегралы 1-го рода и 2-го, их определение, вычисление и геометрический смысл.
82. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия
83. ДУ с разделяющимися переменными
84. Однородные ДУ.
85. Линейные дифференциальные уравнения.
86. Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия
87. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка
88. Числовые ряды. Частичная сумма. Сумма ряда
89. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд
90. Достаточные признаки сходимости. Признак сравнения
91. Признак Даламбера
92. Радикальный признак Коши
93. Интегральный признак Коши
94. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница
95. Функциональные ряды. Сходимость функциональных рядов.

Контрольные задания по дисциплине

Линейная алгебра

1. Даны матрицы А, В, С, числа α и β.

Вычислить: а) С·В; б) α ·А + β·В.

1.1. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&4\\1&1&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$; α =2; β=3;

1.2. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&4\\1&1&1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$; α =3; β=3;

1.3. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&0&4\\4&1&1\\1&3&5\end{pmatrix}$: $C=\begin{pmatrix}3&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$; α =4; β=2;

2. Решить системы линейных уравнений:
а) по формулам Крамера, матричным методом, методом Гаусса;
б) методом Гаусса;
в) методом Гаусса.

2.1. а) $\begin{cases}2x-5y+4z=15,\\ x+2y-z=-3,\\ 3x+4y+z=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y-z=-3,\\ 2x-5y+4z=15,\\ 3x-3y+3z=12;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-5y+4z=15,\\ x+2y-z=-3,\\ 3x-3y+3z=2.\end{cases}$

2.2. а) $\begin{cases}x+7y+2z=5,\\ 3x-8y-z=1,\\ 4x+2y+z=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+7y+2z=5,\\ 5x+9y+3z=11,\\ 4x+2y+z=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+7y+2z=5,\\ 5x+9y+3z=6,\\ 4x+2y+z=6.\end{cases}$

2.3. а) $\begin{cases}2x+5y+z=8,\\ 3x-y+2z=3,\\ x+y-2z=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+5y+z=8,\\ 7x+16y+z=29,\\ x+y-2z=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x+5y+z=8,\\ 7x+16y+z=2,\\ x+y-2z=5.\end{cases}$

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

Найти: а) угол между векторами $\varphi = (\overline{AB}, \overline{CD})$;

б) проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$;

в) площадь треугольника ABC;

г) высоту треугольника ABC, опущенную из вершины C на сторону AB;

д) объем пирамиды $ABCD$;

е) высоту пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины D на основание ABC.

1.1. $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(4;-1;2)$;

1.2. $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;3)$;

1.3. $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-2;7;3)$, $D(-4;8;-12)$;

1.4. $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $D(5;9;-8)$;

1.5. $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(7;5;-3)$;

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А и перпендикулярно вектор

2.1. А (2,5,-3), В (7,8,-1), С(9,7,4).
2.2. А (7,-5,0), В (8,3,-1), С(8,5,1).
2.3. А (5,3,-1), В (0,0,-3), С(5,-1,0).

3. Даны четыре точки А(x_1,y_1,z_1), В(x_2,y_2,z_2), С(x_3,y_3,z_3), D(x_4,y_4,z_4).

Найти: а) уравнение плоскости, проходящей через точки А, В, С;

б) расстояние от точки Д до плоскости АВС;

в) угол между плоскостью АВС и плоскостью 5x-3y+7z-3=0.

3.1. А (1,-1,2), В (2,1,2), С (1,1,4), Д (0,-3,1).
3.2. А (-3,-1,3), В (2,1,-4), С (0,-3,-1), Д (-1,2,-2).
3.3. А (1,3,0), В (4,-1,2), С (3,0,1), Д (-4,3,0).

4. Прямая L_1 задана общими уравнениями.

Найти: а) канонические и параметрические уравнения прямой L_1;

б) найти угол между прямой L_1 и прямой L_2: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$.

4.1. L_1: $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$

4.2. L_1: $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$

4.3. L_1: $\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$

4.4. L_1: $\begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$

5. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

5.1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$, $x+2\cdot y+3\cdot z-14=0$.

5.2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$, $x+2\cdot y-5\cdot z+20=0$.

5.3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$, $x-3\cdot y+7\cdot z-24=0$.

6. Даны точки А,В,С.

Найти: а) угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$;

б) проекцию вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$;

в) угол между медианой АД и высотой АЕ;

г) уравнение прямой, проходящей через точку С, параллельно прямой АВ;

д) точку пересечения высот треугольника.

6.1. A(2,3), B(4,5), C(3,-2).

6.2. A(2,5), B(-4,5), C(0,1).

6.3. A(1,3), B(-2,3), C(3,4).

6.16. A(2,4), B(1,5), C(3,-5).

6.17.A(3,4), B(6,2), C(-1,10).

6.18. A(2,1), B(4,6), C(-2,-2).

Пределы. Непрерывность функции

Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{3\sqrt[3]{n}+n}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n-5}$

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{7n^2-2n+3}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+7}{5n+3}\right)^{n}$

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{n^3-3n+2}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{3n}$

1. Вычислить предел функции:

2.1. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при: а) $x_0=2$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$

2.2. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при: а) $x_0=0$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$

2.3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при: а) $x_0=3$; б) $x_0=-3$; в) $x_0=\infty$

1. Вычислить предел функции:

3.1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$

3.2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{10-2x}}{x-3}$

3.3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$

3.4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$

1. **Вычислить предел функции:**

4.1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

4.2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg6x}{x^2-2x}$

4.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

4.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sin 7x}$

1. **Исследовать функцию *y=f(x)* на непрерывность; найти точки разрыва. Построить график функции:**

7.1.
$$y=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ x^2+1, & -2\le x\le 2 \\ x+3, & x>2 \end{cases}$$

7.2. $$y=\begin{cases} 1, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$$

7.3.
$$y=\begin{cases} -1, & x<0 \\ \sqrt{x}, & 0\le x\le 4 \\ x-2, & x>4 \end{cases}$$

7.4.
$$y=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x\le \pi/2 \\ x+1, & x>\pi/2 \end{cases}$$

Производные. Приложение производной

1.Найти производную:

1.1. а) $y=5e^x+ctgx-2$; б) $y=\sin 2x-\sqrt{x^4+3x^2}$

1.2. а) $y=3\ln x-tgx+1$; б) $y=\arcsin 6x+\cos^9 x$

1.3. а) $y=3^x+ctgx-4$; б) $y=\sqrt{\arcsin x}+e^{\cos x}$

2.Найти производную:

2.1. а) $y=\ln x\cdot\arcsin x$; б) $y=arctg^4x\cdot\cos(e^x)$

2.2. а) $y=7^x\cdot ctgx$; б) $y=\sin 2x\cdot\sqrt{x^6+2x}$

2.3. а) $y=\ln x\cdot\sin x$; б) $y=tg^4x\cdot\ln(\arccos x)$

Найти производную:

3.1. а) $y=\dfrac{tgx}{2^x}$; б) $y=\dfrac{e^{\sin x}}{x^3-2\ln x}$

3.2. а) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x}}{e^x}$; б) $y=\dfrac{x^4+1}{\ln 9x}$

3.3. а) $y=\dfrac{arctgx}{x^2+x}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{ctg4x}$

. Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя:

2.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+5x^3}{5x^4-2x+10}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$

2.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+7x+3x^4}{x^3-5x+6}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sin \pi x}$

2.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+3x+2x^4}{x^4-10x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 7x}$

Исследовать функцию на экстремум и перегиб, и построить схематический график:

3.1. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$;

3.2. $y=2x^3-3x^2+4$;

3.3. $y=2x^3-6x^2-18x+3$;

Провести полное исследование функции и построить её график:

4.1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$;

4.2. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$;

4.3. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$;

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛ

1**. Вычислить неопределенный интеграл.**

1.1.а) $\int\left(5x^4-\frac{3}{x^7}+2\sqrt[9]{x}+\sin x\right)dx$ б) $\int\frac{(3x+2)^2}{x^4}dx$

1.2. а) $\int\left(2x^6+\frac{7}{x^9}-3\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$ б) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

1.3. а) $\int\left(3x^7-\frac{2}{x^6}+5\sqrt[3]{x}+\cos x\right)dx$ б) $\int\frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

2. Вычислить неопределенный интеграл

2.1. а) $\int\sqrt{5-2x^3}\cdot x^2dx$	б) $\int e^{2\cos x+1}\cdot\sin xdx$
2. 2. а) $\int\frac{x^2}{7x^3-3}dx$	б) $\int\frac{tg^5x+3}{\cos^2 x}dx$
2.3. а) $\int\left(2x^4+3\right)^{10}\cdot x^3dx$	б) $\int\frac{1+\ln^3 x}{x}dx$

3. Вычислить неопределенный интеграл.

3.1. а) $\int(2x-1)\cos 3xdx$ б) $\int\ln xdx$

3.2. а) $\int(5-x)\cdot e^{2x}dx$ б) $\int\arcsin xdx$

3.3. а) $\int(3-x)\sin 3xdx$ б) $\int x^2\ln xdx$

4. Вычислить неопределенный интеграл

4.1. а) $\int\frac{x+1}{x^2+4x+29}dx$ б) $\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2-2x}}dx$

4.2. а) $\int\frac{3x+2}{x^2-2x+3}dx$ б) $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x}}dx$

4.3. а) $\int\frac{2x-1}{x^2+2x+3}dx$ б) $\int\frac{4x+3}{\sqrt{x^2-8x}}dx$

5. Вычислить неопределенный интеграл.

5.1. а) $\int\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-2)}dx$ б) $\int\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2\left(x^2+4\right)}dx$

5.2. а) $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)}dx$ б) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+9)}dx$

5.3. а) $\int \frac{x^2+2}{x(x-3)(x-1)}dx$ б) $\int \frac{x^2-x+2}{(x-2)^2(x^2+1)}dx$

6. Вычислить неопределенный интеграл

6.1. $\int \sin^3 x\,dx$

6.2. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

6.3. $\int \frac{\cos x}{2+\cos x}dx$

6.4. $\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$

6.5. $\int \sin^4 x\,dx$

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями. Сделать чертеж.

8.1. а) $y=x^2-2x$, $y=x$. б) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

8.2. а) $y=x^2+3x$, $y=2x$. б) $r=4\cos 3\varphi$

8.3. а) $y=x^2-6x$, $y=-4x$. б) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

Вычислить объем тела вращения. Сделать чертеж.

9.1. $\begin{cases} x+y=1, \\ x=0, \\ y=0 \end{cases}$ вокруг оси ox

9.8. $\begin{cases} x=y^2, \\ x=0, \\ y=1 \end{cases}$ вокруг оси oy

9.2. $\begin{cases} x+y=1, \\ x=0, \quad \text{вокруг оси } oy \\ y=0 \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} y=x^2, \\ x=2, \quad \text{вокруг оси } ox \\ y=0 \end{cases}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y$

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

1.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

2.3. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2.4. $y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

Задача 3. Найти решение задачи Коши:

3.1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

3.2. $y' - y\,ctg\,x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

3.3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

Задача 6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

6.1. а) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$, б) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$,

в) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

6.2. а) $y''' - y' = x^2 + x$, б) $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$,

в) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

6.3. а) $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$, б) $y''' - y'' - y' + y = (3x+7)e^{2x}$,

в) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

1.1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задание 1. Найти решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными: а) по формулам Крамера; б) методом обратной матрицы;
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение:

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix},$$

где A – матрица системы, составленная из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2 и x_3; X – столбец неизвестных; B - столбец свободных членов.

а) **Метод Крамера**

Вычислим определитель матрицы A разложением по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot((-1)\cdot 1 - 2\cdot 3) + 5\cdot(2\cdot 1 - 2\cdot(-1)) + 1\cdot(2\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)) = -21 + 20 + 5 = 4.$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то решение системы может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta;\ x_2 = \Delta_2/\Delta;\ x_3 = \Delta_3/\Delta,$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 – определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 и 3-го столбца соответственно столбцом свободных членов B.

Найдем Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 8;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 12.$$

Подставим полученные значения в формулы Крамера и получим искомое решение системы:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 4/4 = 1;\ x_2 = \Delta_2/\Delta = 8/4 = 2;\ x_3 = \Delta_3/\Delta = 12/4 = 3.$$

Таким образом, получено решение системы: $\boldsymbol{x_1=1; x_2=2; x_3=3.}$

б) **Метод обратной матрицы**

Запишем систему в матричной форме: $AX=B$.

Определитель матрицы A системы уравнений отличен от нуля ($\Delta\neq 0$), следовательно матрица A имеет обратную A^{-1} и решение системы имеет вид:

$$X=A^{-1}B,$$

где: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}$,

$\tilde{A}$ - присоединенная матрица, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A', транспонированной к A.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, получающийся из определителя матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Таким образом, **в *i*-й строке и *j*-м столбце** обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего **в *j*-й строке и в *i*-м** столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

1) Транспонируем матрицу A (запишем строки исходной матрицы A в столбцы транспонированной матрицы A'):

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислим алгебраические дополнения $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ к элементам транспонированной матрицы A':

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8; \quad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

3) Запишем присоединенную матрицу $\tilde{A}$ и найдем обратную A^{-1}:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 & 2 & -9/4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5/4 & -1 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

4) Проверим правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}:

$$A^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7\cdot 3 + 8\cdot 2 + (-9)\cdot(-1) & -7\cdot(-5) + 8\cdot(-1) + (-9)\cdot 3 & -7\cdot 1 + 8\cdot 2 + (-9)\cdot 1 \\ -4\cdot 3 + 4\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) & -4\cdot(-5) + 4\cdot(-1) + (-4)\cdot 3 & -4\cdot 1 + 4\cdot 2 + (-4)\cdot 1 \\ 5\cdot 3 + (-4)\cdot 2 + 7\cdot(-1) & 5\cdot(-5) + (-4)\cdot(-1) + 7\cdot 3 & 5\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + 7\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

где E – единичная матрица.

5) Найдем решение системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -9 \\ -4 & 4 & -4 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7\cdot(-4) + 8\cdot 6 + (-9)\cdot 8 \\ -4\cdot(-4) + 4\cdot 6 + (-4)\cdot 8 \\ 5\cdot(-4) + (-4)\cdot 6 + 7\cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получено решение системы: $\boldsymbol{x_1=1; x_2=2; x_3=3.}$

в) **Метод Гаусса**

Запишем расширенную матрицу A_1 системы, полученную путем присоединения к исходной матрице A системы столбца свободных членов B:

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований (перестановки строк; умножения строки на ненулевое число; прибавления к одной строке другой умноженной на число) расширенную матрицу A_1 системы сведем к равносильной матрице ступенчатого вида.

Прямой ход метода Гаусса:

1) Поменяем местами первую и третью строки в матрице A_1, чтобы в первой строке и первом столбце оказался элемент (–1):

$$A_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

2) Умножим первую строку на 2 и прибавим ко второй строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

3) Умножим первую строку на 3 и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right).$$

4) Разделим третью строку на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

5) Поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \end{array}\right).$$

6) Умножим вторую строку на (–5) и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса:

В результате преобразований получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 = 5, \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$

откуда находим из третьего уравнения x_3=3;

из второго уравнения $x_2=5-x_3=5-3=2$;

из первого уравнения $x_1= -8+3x_2+x_3= -8+6+3=1$.

Таким образом, получено решение системы: $\boldsymbol{x_1=1; x_2=2; x_3=3.}$

Задание 2. По координатам вершин треугольника *A*(1; 1), *B*(-5; 4), *C*(-2; 5) найти:

а) длину стороны *AB*;

б) внутренний угол $\angle A$ между сторонами *AB* и *AC*;

в) уравнение высоты, проведенной через вершину *C*;

г) точку пересечения высот треугольника *ABC*;

д) длину высоты, опущенной из вершины *C*;

е) систему линейных неравенств, определяющих треугольник *ABC*.

Сделать чертеж.

Решение: Сделаем чертеж (рис.1): по точкам *A*(1; 1), *B*(-5; 4), *C*(-2; 5) построим треугольник *ABC*; через вершины *A*, *B* и *C* проведем высоты *AK*, *BN* и *CH*; точку пересечения высот обозначим через *P*.

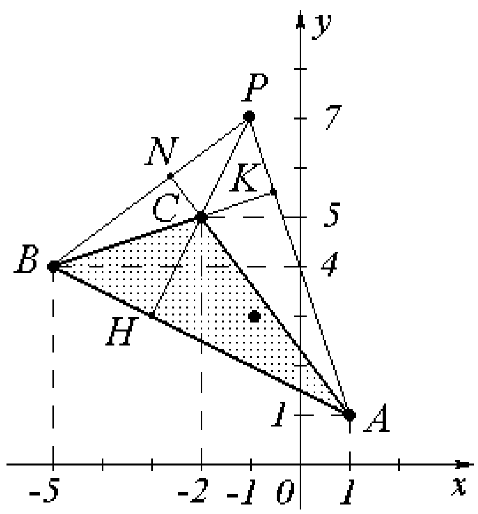


Рисунок 1

а) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Чтобы определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, необходимо из координат конечной точки $B(x_2;y_2)$ вычесть одноименные координаты начальной точки $A(x_1;y_1)$:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

Получим

$$\overrightarrow{AB} = \{-5-1; 4-1\} = \{-6; 3\}.$$

Длина любого вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ находится по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Тогда длину стороны AB находим как длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}.$$

б) Внутренний угол $\angle A$ между сторонами AB и AC найдем как угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $\overrightarrow{AC} = \{-2-1; 5-1\} = \{-3; 4\}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

Косинус угла φ между векторами $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b; y_b\}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}.$$

Найдем косинус угла $\angle A$ между сторонами AB и AC:

$$\cos\angle A = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-6)\cdot(-3) + 3\cdot 4}{3\sqrt{5}\cdot 5} = \frac{30}{15\sqrt{5}} \cong 0.89.$$

в) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Составим это уравнение для прямой, проходящей через точки А и В:

$$\frac{x-1}{-5-1}=\frac{y-1}{4-1},$$

т.е.

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-1}{3}.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$3(x-1)=-6(y-1),$$

или

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Получили уравнение прямой АВ с угловым коэффициентом $k=-\frac{1}{2}$.

Высота СН треугольника АВС, перпендикулярна прямой, проходящей через точки *A* и *B*. Если прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Тогда угловой коэффициент высоты СН равен $k_2=-\frac{1}{k_1}=2$,

а уравнение высоты имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, где $(x_0;y_0)$ - координаты точки *C*; *k* - угловой коэффициент высоты. В нашем случае *C*(-2; 5), *k*=2.
Получим

$$y-5=2(x+2).$$

Искомое уравнение высоты СН имеет вид

$$y=2x+9. \tag{1}$$

г) Чтобы найти координаты точки *P* пересечения высот треугольника *ABC*, найдем уравнение высоты треугольника АВС, проведенной из вершины *B* и решим систему уравнений двух высот.
Составим уравнение прямой, проходящей через точки *A* и *C*:

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-1}{5-1}.$$

Преобразуя, получим

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}; \quad k=-\frac{4}{3}.$$

Высота BN треугольника ABC, проведенная из вершины *B*(-5;4) перпендикулярна прямой, проходящей через точки *A* и *C*, ее угловой коэффициент равен $k=\frac{3}{4}$. Уравнение высоты BN треугольника ABC имеет вид

$$y-4=\frac{3}{4}(x+5),$$

или

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{31}{4}. \qquad (2)$$

Координаты точки *P* пересечения высот треугольника *ABC* найдем, решив систему уравнений (1) и (2)

$$\begin{cases} y=2x+9 \\ y=\frac{3}{4}x+\frac{31}{4} \end{cases}.$$

Координаты точки *P*: $x=-1$; $y=7$.

д) Длина высоты CH, равна расстоянию от точки *C* до прямой, проходящей через точки *A* и *B* и находится по формуле:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

где $(x_0;y_0)$ - координаты точки *C*;

$ax+by+c=0$ – общее уравнение прямой.

Общее уравнение прямой, проходящей через точки A и B,

$$x+2y-3=0,$$

получено преобразованием уравнения прямой AB $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Тогда длина высоты равна:

$$d=\frac{\left|1\cdot(-2)+2\cdot 5-3\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}.$$

е) Общие уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника *ABC*:

AB: $x+2y-3=0$;

AC: $4x+3y-7=0$; (3)

BC: $x-3y+17=0$. (получено аналогично уравнениям *AB и AC*)

Выберем произвольно точку, лежащую внутри треугольника АВС (на рис.1 заштрихованная область), например, точку с координатами (-1; 3). Подставив координаты точки в уравнения прямых (3), определим знаки неравенств, определяющих треугольник *ABC*:

$$-1+2\cdot 3-3=1\geq 0;$$
$$4\cdot(-1)+3\cdot 3-7=-2\leq 0;$$
$$-1-3\cdot 3+17=7\geq 0.$$

Получим следующую систему линейных неравенств, определяющих треугольник

$$\begin{cases} x+2y-3\geq 0; \\ 4x+3y-7\leq 0; \\ x-3y+17\geq 0. \end{cases}$$

1.2 ПРЕДЕЛЫ

Задание 3. Найти предел функции.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}$ при: а) $x_0=4$; б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\dfrac{3\cdot 4^2+2\cdot 4-1}{-2\cdot 4^2-5\cdot 4-3}=\dfrac{55}{-55}=-1;$

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\dfrac{3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1}{-2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Подстановка предельного значения $x=-1$ привела к неопределенности [0/0]. Для раскрытия неопределенности разложим многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, на множители и сократим дробь:

$$3x^2+2x-1=0,\ x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm 4}{6},\ x_1=\frac{1}{3},\ x_2=-1;$$

$$-2x^2-5x-3=0,\ x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)}}{2\cdot(-2)}=\frac{5\pm 1}{-4},\ x_1=-1,\ x_2=-\frac{3}{2};$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x-1/3)(x+1)}{-2(x+1)(x+3/2)}=\lim_{x\to -1}\frac{3(x-1/3)}{-2(x+3/2)}=$$

$$=\frac{3(-1-1/3)}{-2(-1+3/2)}=4.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Для раскрытия неопределенности [∞/∞], разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{-2x^2-5x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{-2x^2}{x^2}-\dfrac{5x}{x^2}-\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{-2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=$$

$$=\frac{3+0+0}{-2+0+0}=-\frac{3}{2}.$$

1.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задание 4. Найти производные заданных функций:

а) $y=-2\sqrt[5]{x}+7\sin x$; б) $y=e^x\cdot arctg\ x$; в) $y=\dfrac{x^3}{ctg\ x}$; г) $y=ln(3x^4-4)$.

Решение:

а) $y' = \left(-2\sqrt[5]{x} + 7\,sin\,x\right)' = \left(-2\sqrt[5]{x}\right)' + \left(7\,sin\,x\right)' = -2\cdot\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} + 7\,cos\,x =$

$= -\frac{2}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 7\,cos\,x = -\frac{2}{5\sqrt[5]{x^4}} + 7\,cos\,x;$

б) $y' = \left(e^x \cdot arctg\,x\right)' = \left(e^x\right)' arctg\,x + e^x\left(arctg\,x\right)' = e^x arctg\,x + e^x\,\frac{1}{1+x^2};$

в) $y' = \left(\frac{x^3}{ctg\,x}\right)' = \frac{\left(x^3\right)' ctg\,x - x^3\left(ctg\,x\right)'}{\left(ctg\,x\right)^2} = \frac{3x^2 ctg\,x - x^3\left(-\frac{1}{sin^2\,x}\right)}{ctg^2 x} =$

$= \frac{3x^2\,\frac{cos\,x}{sin\,x} + \frac{x^3}{sin^2\,x}}{ctg^2 x} = \frac{3x^2\,cos\,x\cdot sin\,x + x^3}{sin^2\,x\cdot ctg^2 x} = 3x^2 tgx + \frac{x^3}{cos^2\,x};$

г) $y' = \left(ln\left(3x^4 - 4\right)\right)' = \frac{1}{3x^4-4}\cdot\left(3x^4-4\right)' = \frac{12x^3}{3x^4-4}.$

Задание 5. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$ и построить ее график.

Решение:

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $x \neq 1$.
2) Функция не является четной и не является нечетной.
3) Вертикальные асимптоты.

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2}{2(x-1)} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x^2}{2(x-1)} = +\infty$,

то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

4) Наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты, если она существует, запишем в виде $y = kx + b$. Найдем коэффициенты k и *в* по формулам:

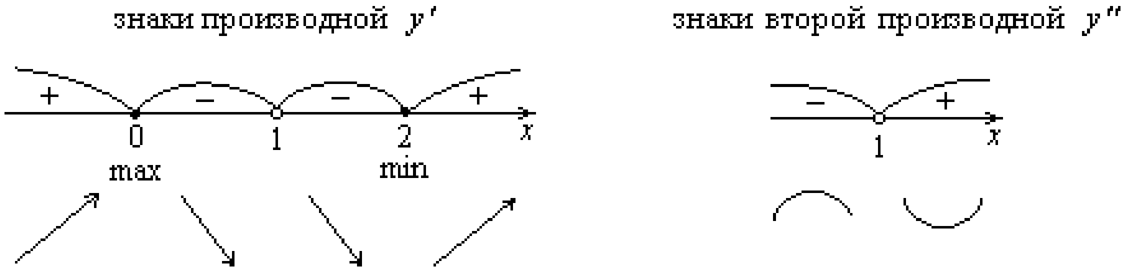
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\frac{1}{2};\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

5) Экстремумы и интервалы монотонности.

$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{2(x-1)^2}$. $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow$ $x=0$ или $x=2$. y' не существует в точке $x=1$, но эта точка не входит в область определения функции. Следовательно, имеются две критические точки $x=0$ и $x=2$.

Разобьем этими точками область определения на интервалы знакопостоянства производной: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ +\infty)$. Определим знаки производной в этих интервалах: $y'(-1)>0$ и $y'(3)>0 \Rightarrow$ в интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(2,\ +\infty)$ производная положительна, $y'(0{,}1)<0$ и $y'(1{,}1)<0 \Rightarrow$ в интервалах $(0,\ 1)$ и $(1,\ 2)$ производная отрицательна (Рис. 2*а*). Следовательно: функция возрастает в интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(2,\ +\infty)$, убывает в $(0,\ 1)$ и $(1,\ 2)$, $x=0$ – точка максимума, $x=2$ – точка минимума. Значение максимума $y_{\max}=y(0)=0$, значение минимума $y_{\min}=y(2)=2$.



а) монотонность, экстремумы

б) выпуклость, вогнутость, точки перегиба

Рисунок 2

6) Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Найдем вторую производную функции, приравняем ее к нулю и определим критическую точку:

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{2(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2-2x)}{2(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Нанесем критическую точку на числовую ось (рис.2*б*) и определим знак второй производной на интервалах ($-\infty$, 1) и (1, $+\infty$). Вторая производная не обращается в 0, а в точке x=1, где она не существует, функция не определена, поэтому график функции не имеет точки перегиба. Получим $y''(x)<0$ при $x<1$; $y''(x)>0$ при $x>1$ (Рис. 2*б*). Следовательно, в интервале ($-\infty$, 1) функция y(x) выпукла вверх, а в интервале (1, $+\infty$) функция y(x) выпукла вниз.

7) Найдем точки пересечения с осями координат.

Так как $\frac{x^2}{2(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то график пересекает оси системы координат только в ее начале.

8) Построим график функции (Рис. 3).

На рисунке асимптоты $x = 1$ и $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ начерчены пунктирной линией.

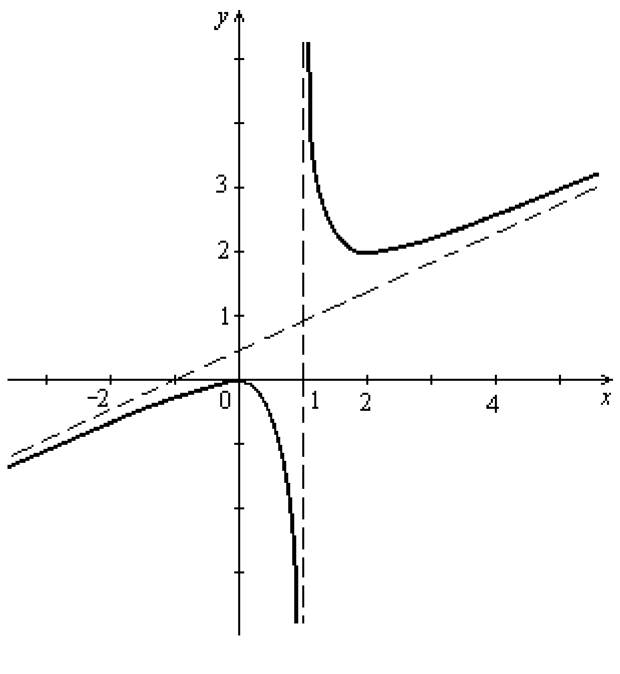


Рисунок 3

Задание 6. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = 4x^3 - 8x^2 - 11x + 15$ и построить ее график. и построить ее график.

Решение:

1) Область определения функции есть множество всех действительных чисел, т.е. (−∞; +∞).

2) Функция не является четной и не является нечетной, т.к.

$$y(-x) = -4x^3 - 8x^2 + 11x + 15,\ y(-x) \neq y(x) \text{ и } y(-x) \neq -y(x) \text{ при } \forall x \neq 0.$$

3) Вертикальных асимптот нет, т.к. функция определена при всех действительных значениях x.

4) Наклонные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты, если она существует, будем искать в виде $y = kx + b$. Найдем коэффициент k по формуле:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 8x^2 - 11x + 15}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - \frac{8}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{15}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

Так как предел не является конечным, то наклонных асимптот нет.

5) Экстремумы и интервалы монотонности.

Найдем производную функции, приравняем ее к нулю и определим критические точки:

$$y' = 12x^2 - 16x - 11;$$

$$12x^2 - 16x - 11 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 12\cdot(-11)}}{2\cdot 12} = \frac{16 \pm 28}{24};\ x_1 = \frac{11}{6},\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Нанесем критические точки на числовую ось (рис.4) и определим знак производной на интервалах (-∞;−1/2), (−1/2;11/6), (11/6;+∞).

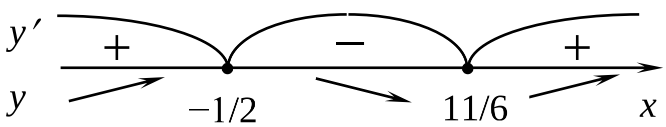


Рисунок 4

Получим: $y'(x)>0$ при $x<-1/2$ и при $x>11/6$; $y'(x)<0$ при $-1/2<x<11/6$. На интервалах $(-\infty;-1/2)$ и $(11/6;+\infty)$ функция $y(x)$ возрастает; на интервале $(-1/2;11/6)$ функция $y(x)$ убывает. Согласно достаточному условию экстремума $x= -1/2$ – точка максимума данной функции, y_{max}=y(−1/2)=18; x=11/6 – точка минимума данной функции, y_{min}=y(11/6)$\cong$−7,407.

6) Интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную функции, приравняем ее к нулю и определим критическую точку:

$$y'' = 24x - 16;\ 24x - 16 = 0;\ x = \frac{2}{3}.$$

Нанесем критическую точку на числовую ось (рис.5), определим знак второй производной на интервалах $(-\infty;2/3)$, $(2/3;+\infty)$.

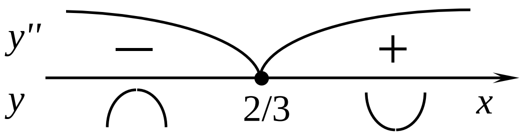


Рисунок 5

Получим $y''(x)<0$ при $x<2/3$; $y''(x)>0$ при $x>2/3$. На интервале $(-\infty;2/3)$ функция $y(x)$ выпукла вверх; на интервале $(2/3;+\infty)$ функция $y(x)$ выпукла вниз. Следовательно, x=2/3 – точка перегиба данной функции, $y_{п}=y(2/3)\cong 5{,}296$.

7) Найдем точки пересечения с осями координат.

а) Точка пересечения с осью ординат: $y(0)=15$, т.е. точка (0,15).

б) Точки пересечения с осью абсцисс найдем из уравнения $y(x)=0$:

$$4x^3 - 8x^2 - 11x + 15 = 0. \quad (1)$$

Корни кубического уравнения находятся среди чисел, на которые свободный член 15 делится без остатка. Один из корней $x_1=1$, т.к. если его подставить в (1) получим тождество: $4-8-11+15\equiv 0$.

Приравняем к нулю частное от деления многочленов и найдем оставшиеся два корня уравнения:

$$4x^2 - 4x - 15 = 0;\ x_2 = 2{,}5,\ x_3 = -1{,}5.$$

Таким образом, точки пересечения графика функции с осью абсцисс

(1;0); (2,5;0); (−1,5;0).

8) Построим график функции (Рис. 6).

Разделим кубический многочлен на $(x - x_1)$, т.е на $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;4x^3 - 8x^2 - 11x + 15 & x - 1 \\
\underline{4x^3 - 4x^2 } & \overline{4x^2 - 4x - 15} \\
-\;-4x^2 - 11x + 15 & \\
\underline{-4x^2 + 4x } & \\
-\;-15x + 15 & \\
\underline{-15x + 15} & \\
0 &
\end{array}
$$

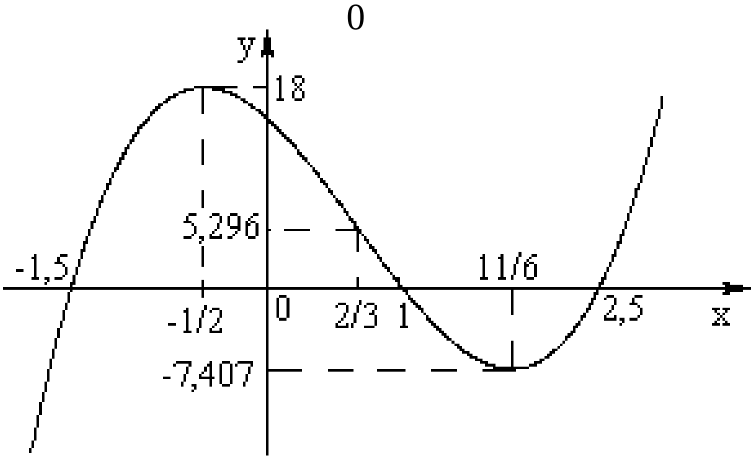


Рисунок 6

Задание7. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

а) $\int(-5x^8 - \frac{11}{x} + \sqrt[12]{x})dx = \int\left(-5x^8\right)dx + \int\left(-\frac{11}{x}\right)dx + \int\sqrt[12]{x}dx =$

$$= -5 \cdot \frac{x^9}{9} - 11ln|x| + \frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}} + C = -\frac{5x^9}{9} - 11ln|x| + \frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}} + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{5x^9}{9}-11\ln|x|+\frac{12}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C\right)'=-\frac{5}{9}\cdot 9x^{9-1}-11\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}\right)'=$$

$$=-5x^8-\frac{11}{x}+\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{12}x^{\frac{13}{12}-1}=-5x^8-\frac{11}{x}+\sqrt[12]{x}.$$

б) $\int e^{\sin 2x}\cos 2x dx$.

Полагаем $t=\sin 2x$. Тогда $dt=(\sin 2x)'dx$, т.е. $dt=2\cos 2x dx$. Отсюда $\cos 2x dx=\frac{dt}{2}$ и, следовательно,

$$\int e^{\sin 2x}\cos 2x dx=\int\frac{e^t dt}{2}=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{\sin 2x}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}e^{\sin 2x}+C\right)'=\frac{1}{2}e^{\sin 2x}(\sin 2x)'=\frac{1}{2}e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x=e^{\sin 2x}\cos 2x.$$

в) $\int(2+5x)\sin x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv=uv-\int v du.$$

Полагаем $u=2+5x$, $dv=\sin x dx$.

Тогда $du=(2+5x)'dx$, т.е. $du=5dx$, и $v=\int\sin x dx$, т.е. $v=-\cos x$.

Следовательно

$$\int(2+5x)\sin x dx=-(2+5x)\cos x-\int 5(-\cos x)dx=-(2+5x)\cos x+5\sin x+C.$$

Проверка:

$$(-(2+5x)\cos x+5\sin x+C)'=-\left((2+5x)'\cdot\cos x+(2+5x)\cdot(\cos x)'\right)+5\cos x=$$
$$=-5\cos x+(2+5x)\sin x+5\cos x=(2+5x)\sin x.$$

Задание 8. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x+4$ и прямой $y=x+6$. Сделать чертеж.

Решение: 1) Построим параболу $y = x^2 + 2x + 4$. Координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ - точки (x_0;y_0) - находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{-b}{2a};\ y_0 = a{x_0}^2 + bx_0 + c.$$

В нашем случае $x_0 = \frac{-2}{2} = -1$, $y_0 = y(-1) = 3$. Так как a=1>0, то ветви параболы направлены вверх (Рис.7).

2) Прямую $y = x + 6$ построим по двум точкам: $x = 0$, $y = 0 + 6 = 6$ и $x = -1$, $y = -1 + 6 = 5$.

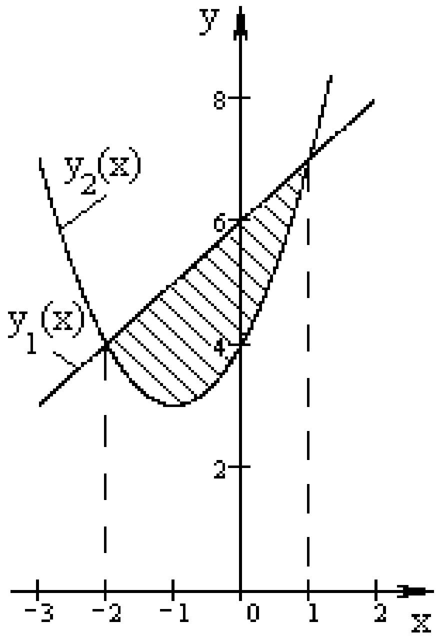


Рисунок 7

3) Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = x + 6 \end{cases};$$

$$x^2 + 2x + 4 - (x + 6) = 0;$$

$$x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -2, y_1 = 4;$$
$$x_2 = 1, y_2 = 7.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, вычисляется по формуле:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (y_1(x) - y_2(x))dx.$$

Найдем площадь фигуры, ограниченной данной прямой и параболой:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[(x+6) - \left(x^2 + 2x + 4\right)\right]dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = 4{,}5 \text{ кв.ед.}$$

1.4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание 9. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $x\ y' - y = 5$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

Решение: Запишем уравнение в виде

$$x\ y' = 5 + y,$$

или

$$x\ dy = (5 + y)dx.$$

Полагая, что $x \neq 0$ и $(5+y) \neq 0$, разделим левую и правую части уравнения на выражение $x\ (5+y)$, в результате получим $\frac{dy}{5+y} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя левую и правую части, получим

$$\ln|5 + y| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Откуда следует, что

$$\ln|5 + y| = \ln|Cx|,$$

или

$$5 + y = Cx.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = Cx - 5.$$

«Потерянное» в процессе преобразований решение y= -5 при $x = 0$ получается из найденного общего решения при $C=0$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$. Для этого подставим значения $x=1$ и $y=0$ в общее решение и найдем значение С=5.

Частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$ имеет вид $y=5x-5$.

Задание 10. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1+3x_2 \end{cases}. \qquad (1)$$

Решение: Продифференцируем первое уравнение системы (1) по t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=4\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}.$$

Подставим вместо $\dfrac{dx_2}{dt}$ ее выражение из второго уравнения системы (1):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=4\frac{dx_1}{dt}-(-2x_1+3x_2).$$

Получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=4\frac{dx_1}{dt}+2x_1-3x_2 \qquad (2)$$

Выразим x_2 из первого уравнения системы (1):

$$x_2=-\frac{dx_1}{dt}+4x_1. \qquad (3)$$

Подставим полученное выражение (3) в уравнение (2):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=4\frac{dx_1}{dt}+2x_1-3\left(-\frac{dx_1}{dt}+4x_1\right) \text{ или}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=7\frac{dx_1}{dt}-10x_1. \qquad (4)$$

Таким образом, получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-7\frac{dx_1}{dt}+10x_1=0. \qquad (5)$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ имеет корни

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2.$$

Общее решение имеет вид:

$$x_1 = C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t}, \qquad (6)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставим найденное выражение (6) в (3):

$$\begin{aligned} x_2 &= -\left(C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t}\right)' + 4\left(C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t}\right) = \\ &= -5C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{2t} + 4C_1 e^{5t} + 4C_2 e^{2t} = -C_1 e^{5t} + 2C_2 e^{2t} \end{aligned} \qquad (7)$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{5t} + C_2 e^{2t} \\ x_2 = -C_1 e^{5t} + 2C_2 e^{2t} \end{cases}$$

1.5 РЯДЫ

Задание 11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n n!}{n^n}$.

Решение: Общий член данного ряда с положительными членами имеет вид: $a_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$. Тогда $a_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 4^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot 4 \cdot n!\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)\cdot 4^n \cdot n!} =$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{4}{e} > 1,$$

то по признаку Даламбера ряд расходится.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)				
Рекомендуемая литература				
Основная литература				
	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Количество
Л1.1	Балдин К.В.	Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие:	М. : Юнити-Дана,	ЭБС
Л1.2	Кузнецов, Б.Т.	Математика : учебник	М. : Юнити-Дана,	ЭБС
Л1.3	Магазинников Л.И.	Высшая математика. Дифференциальное исчисление	Томск: Томский	ЭБС
Дополнительная литература				
	Авторы,	Заглавие	Издательство, год	Количество
Л2.1	Н.Ш. Кремер	Высшая математика для экономистов [электронный ресурс]: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям http://www.iprbookshop.ru/52071.html	М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015	ЭБС
Л2.2	Исаева, С.И.	Математика [электронный ресурс]: учебное пособие http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229172	Красноярск : Сибирский федеральный университет,, 2011	ЭБС
Л2.3	В. В. Власов, С. И. Митрохин, А. В. Прошкина [и др.].	Математический анализ и дифференциальные уравнения. Задачи и упражнения : учебное пособие http://www.iprbookshop.ru/97549.html	Москва : Интернет -Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020	ЭБС
Методические разработки				
	Авторы,	Заглавие	Издательство, год	Количество
Л3.1	Сапожникова А.Г.	Сапожникова А.Г. Руководство для преподавателей по организации и планированию различных видов занятий и самостоятельной работы обучающихся в Донском государственном техническом университете : методические указания https://drive.google.com/open?id=1xhXL5W59-ID_uyoekOpuxd_bjWx6V7Sg	Ростов-на-Дону: Донской гос.тех.ун-т, 2018	ЭБС
Л3.2	В.И. Полтинников	Высшая математика [электроный ресурс]: Учебное пособие https://ntb.donstu.ru/content/vysshaya-matematika	ДГТУ, 2012	ЭБС
Л3.3	Е.В. Маринченко	Математика. Линейная алгебра [Электронный ресурс]: учебное пособие https://ntb.donstu.ru/content/matematika-lineynaya-algebra	ДГТУ, 2018	ЭБС